Tabella con i principali limiti notevoli.

Limiti trigonometrici		
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$	3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$	5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$	6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arctan x}=1$
Limiti esponenziali e logaritmici		
7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x=e^{\alpha}$	8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}$	9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$
Limiti di successioni notevoli		
13. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x}=1\quad\forall x\in IR_+-\{0\}$	14. $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=\begin{cases}0 & \text{se } -1<a<1\\ 1 & \text{se } a=1\\ +\infty & \text{se } a>1\\ \nexists & \text{se } s\ a\le -1\end{cases}$	15. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1\quad\forall x\in IR_+-\{0\}$
16. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^{\alpha}}=1\quad\forall\alpha\in IR$	17. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$	18. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{a^n}=0\quad\forall a>1$
19. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{a^n}=0\quad\forall a>1$	20. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{a^n}=0\quad\forall a>1$	21. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}}=0\quad\forall a>1\wedge\beta\in IR$
22. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$	23. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n=e^{\alpha}$	24. $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1$

È essenziale imparare a leggere la tabella precedente e comprendere che affinché si possano utilizzare nel calcolo di un limite qualsiasi i risultati in essa sintetizzati, il limite proposto deve essere, eventualmente, modificato in una forma equivalente in modo che vi compaia uno, o più, dei limiti notevoli elencati ma scritti **esattamente** come si vedono in tabella.

ESEMPIO 1.

Il limite 1. afferma che "il rapporto tra il seno di un angolo e l'**angolo stesso** tende a 1 quando l'angolo tende a 0". Quindi, volendo calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x}$ **non si può fare il seguente ragionamento:** "dato che quando $x \to 0$ anche $x^2-2x\to 0$, allora il limite vale 1 perché, per la 1., è il rapporto tra il seno di un angolo che tende a 0 e un **altro** angolo che però tende anch'esso a 0". L'errore consiste nel fatto che **a denominatore non c'è lo stesso angolo che figura come argomento del seno**. Il calcolo corretto è il seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(x-2\right)\frac{\sin\left(x\left(x-2\right)\right)}{x\left(x-2\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left(x-2\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\left(x-2\right)\right)}{x\left(x-2\right)}=-2\cdot 1=-2$$

Si osservi che $x\to 0$ comporta in pratica che $x\neq 2$, per cui le espressioni $\frac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x}$ e $\left(x-2\right)\frac{\sin\left(x\left(x-2\right)\right)}{x\left(x-2\right)}$ sono, in prossimità di 0, perfettamente equivalenti per la proprietà invariantiva delle frazioni.

ESEMPIO 2.

Il limite 10. afferma che: "se l'argomento dell'esponenziale tende a 0, il rapporto tra l'esponenziale in base a di tale argomento, diminuito di 1, e l'**argomento stesso** tende a $\ln a$". Anche in questo caso, dunque, volendo calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sqrt[3]{x}}$ non è lecito concludere che esso vale $\ln 3$ dato che per $x\to 0$ sia $\sin^2 x$ che $\sqrt[3]{x}$ tendono a 0. L'errore sta nel fatto che **a denominatore non c'è l'argomento dell'esponenziale**. Il calcolo corretto è il seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\sin^2 x\cdot\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sqrt[3]{x}\cdot\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x}\cdot x^2}\cdot\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{x^6}{x}}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x^5}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^5}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}=0\cdot 1\cdot\ln 3=0$$

Con la pratica, il numero di passaggi si può ridurre drasticamente.

In base a quanto detto, la tabella dei limiti notevoli trigonometrici, esponenziali e logaritmici può essere generalizzata come segue:

Limiti trigonometrici		
1'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{\sin(\bullet)}{(\bullet)}=1$	2'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{\tan(\bullet)}{(\bullet)}=1$	3'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{1-\cos(\bullet)}{(\bullet)}=0$
4'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{1-\cos(\bullet)}{(\bullet)^2}=\frac{1}{2}$	5'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{(\bullet)}{\arcsin(\bullet)}=1$	6'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{(\bullet)}{\arctan(\bullet)}=1$
Limiti esponenziali e logaritmici		
7'. $\lim_{(\bullet)\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{(\bullet)}\right)^{(\bullet)}=e^{\alpha}$	8'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\left(1+\alpha(\bullet)\right)^{\frac{1}{(\bullet)}}=e^{\alpha}$	9'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{\log_a(1+(\bullet))}{(\bullet)}=\frac{1}{\ln a}$
10'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{a^{(\bullet)}-1}{(\bullet)}=\ln a$	11'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{e^{(\bullet)}-1}{(\bullet)}=1$	12'. $\lim_{(\bullet)\to 0}\frac{(1+(\bullet))^a-1}{(\bullet)}=a$

Il simbolo $(\bullet)$ sta una qualsiasi funzione di x soddisfacente la condizione di tendere al valore indicato.

ESEMPIO 3.

Calcolare $\lim_{x\to e}\frac{\sin(x-e)}{x-e}$.

Osservato che $x\to e \Rightarrow x-e\to 0$, il limite si risolve grazie alla 1'. immaginando che $(\bullet)$ stia per $x-e$.

Si trova:

$$\lim_{x\to e}\frac{\sin(x-e)}{x-e}=\lim_{(x-e)\to 0}\frac{\sin(x-e)}{x-e}=1$$

ESEMPIO 4.

Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Osservato che $x \to +\infty \Rightarrow x^2+1 \to +\infty$, il limite assume la forma $\lim\limits_{x^2+1\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2+1}\right)^{x^2}$; tuttavia, non si può ancora applicare la 7’. dato che l’esponente è x^2, mentre dovrebbe essere x^2+1. Se però si tiene conto che $\left(1+\dfrac{3}{x^2+1}\right)^{x^2} = \dfrac{\left(1+\dfrac{3}{x^2+1}\right)^{x^2+1}}{\left(1+\dfrac{3}{x^2+1}\right)}$, allora il limite si risolve grazie alla 7’. immaginando che $(\bullet)$ stia per x^2+1.

Svolgendo i calcoli, si trova:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x^2+1\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{3}{x^2+1}\right)^{x^2+1}}{\left(1+\dfrac{3}{x^2+1}\right)} = \frac{e^3}{1} = e^3$$

In genere, l’espressione $(\bullet)$ non si scrive per esteso ma la si indica con una nuova variabile; in pratica si esegue una sostituzione di variabile ponendo, ad esempio, $t=(\bullet)$.

Operando in tal modo, i calcoli relativi gli esempi 3 e 4 precedenti si svolgono così:

- $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\sin(x-e)}{x-e} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$, dove si è posto $t = x-e$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{t}\right)^{t}}{\left(1+\dfrac{3}{t}\right)} = \dfrac{e^3}{1} = e^3$, dove si è posto $t = x^2+1$